CHƯƠNG 4: ĐỊNH THỨC

4.1 HOÁN VỊ VÀ PHÉP THẾ

Định nghĩa 4.1:

1) Mỗi song ánh $\sigma:\{1,2,...,n\}\to\{1,2,...,n\}$ được gọi là một phép thế bậc n.

Ta thường ký hiệu một phép thế bằng một ma trận có hàng thứ nhất là các số 1,2,...,n sắp theo thứ tự tăng dần còn hàng thứ hai là ảnh của nó:

$$\sigma=\begin{bmatrix}1 & 2 & \dots & n\\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n)\end{bmatrix}$$

2) Ảnh của một phép thế được gọi là hoán vị. Với phép thế σ ta có hoán vị tương ứng

$$\begin{bmatrix}\sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n)\end{bmatrix}.$$

3) Dấu của phép thế:

Cho hoán vị $\begin{bmatrix}\sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n)\end{bmatrix}$, nếu có cặp $i<j$ mà $\sigma(i)>\sigma(j)$ thì ta nói có một nghịch thế của σ.

Giả sử k là số các nghịch thế của σ, ta định nghĩa và ký hiệu dấu của phép thế σ là

$$\operatorname{sgn}\sigma=(-1)^k \qquad (4.1)$$

Ta dễ dàng kiểm chứng được rằng tập các phép thế bậc n với luật hợp thành là phép hợp của hai ánh xạ tạo thành một nhóm không giao hoán, gọi là nhóm đối xứng bậc n, ký hiệu S_n.

Trong chương 1 ta đã biết tập S_n có đúng n! phần tử. Chẳng hạn S_2 có 2 phần tử, S_3 có 6 phần tử ...

Ví dụ 4.1: Hoán vị $\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\end{bmatrix}$ ứng với phép thế $\sigma=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 2\end{bmatrix}$ có một nghịch thế. Vậy $\operatorname{sgn}\sigma=(-1)^1=-1$.

Để tìm số các nghịch thế k của phép thế σ ta thực hiện các bước sau:

Trong hoán vị $\begin{bmatrix}\sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n)\end{bmatrix}$ có i_1 là giá trị sao cho $\sigma(i_1)=1$.

♦ Gọi k_1 là số các số trong $[\sigma(1) \quad \sigma(2) \quad \dots \quad \sigma(n)]$ đứng trước $\sigma(i_1)=1$;

♦ Xoá số $\sigma(i_1)=1$, tồn tại i_2 sao cho $\sigma(i_2)=2$, gọi k_2 là số các số còn lại trong $[\sigma(1) \quad \sigma(2) \quad \dots \quad \sigma(n)]$ đứng trước $\sigma(i_2)=2$;

♦ Xoá số $\sigma(i_2)=2$ và tiếp tục đếm như thế ...

Cuối cùng số các nghịch thế của σ là:

$$k = k_1 + k_2 + \dots + k_{n-1}$$

<u>Ví dụ 4.2</u>: Hoán vị $[3 \quad 4 \quad 2 \quad 1]$ có $k_1=3$, $k_2=2$, $k_3=0$.

Vậy $k=5$ và $\operatorname{sgn}\sigma = (-1)^5 = -1$.

<u>Tính chất 4.1</u>:

1) Cặp $(i,j), i \neq j$ là một nghịch thế của phép thế σ (nghĩa là $i<j$ và $\sigma(i)>\sigma(j)$) khi và chỉ khi dấu của $\dfrac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j}$ bằng -1. Vậy

$$\operatorname{sgn}\sigma = \prod_{1\le i\neq j\le n} \text{dấu}\left(\frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j}\right). \tag{4.2}$$

2) Chuyển vị $\sigma=[i_0 \quad j_0]$ là phép thế chỉ biến đổi hai phần tử i_0, j_0 cho nhau và giữ nguyên các phần tử còn lại:

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & i_0 & \dots & j_0 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & j_0 & \dots & i_0 & \dots & n \end{bmatrix} \tag{4.3}$$

Dễ dàng tính được: $k_1 = \dots = k_{i_0-1} = 0$, $k_{i_0} = j_0 - i_0$,

$k_{i_0+1} = \dots = k_{j_0-1} = 1$, $k_{j_0} = \dots = k_n = 0 \quad \Rightarrow \quad k = 2(j_0 - i_0) - 1$

Vậy $\operatorname{sgn}\sigma = (-1)^k = -1$.

3) Với mọi $\sigma, \mu \in S_n$: $\operatorname{sgn}(\sigma\circ\mu) = \operatorname{sgn}\sigma \operatorname{sgn}\mu$. (4.4)

Thật vậy, khi (i,j) chạy khắp tập $\{1,2,\dots,n\}\times\{1,2,\dots,n\}\setminus\{(1,1),\dots,(n,n)\}$ thì $(\mu(i),\mu(j))$ cũng chạy khắp tập này. Do đó:

$$\operatorname{sgn}\sigma=\prod_{1\le i\ne j\le n}\text{dấu}\left(\frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j}\right)=\prod_{1\le \mu(i)\ne \mu(j)\le n}\text{dấu}\left(\frac{\sigma(\mu(i))-\sigma(\mu(j))}{\mu(i)-\mu(j)}\right)$$

$$=\prod_{1\le i\ne j\le n}\text{dấu}\left(\frac{\sigma(\mu(i))-\sigma(\mu(j))}{\mu(i)-\mu(j)}\right).$$

$$\operatorname{sgn}\sigma\operatorname{sgn}\mu=\prod_{1\le i\ne j\le n}\text{dấu}\left(\frac{\sigma(\mu(i))-\sigma(\mu(j))}{\mu(i)-\mu(j)}\right)\cdot\prod_{1\le i\ne j\le n}\text{dấu}\left(\frac{\mu(i)-\mu(j)}{i-j}\right)$$

$$=\prod_{1\le i\ne j\le n}\text{dấu}\left(\frac{\sigma(\mu(i))-\sigma(\mu(j))}{i-j}\right)=\operatorname{sgn}(\sigma\circ\mu).$$

4) Với mọi chuyển vị $[i_0\ \ j_0]$ (xem 4.3) và phép thế σ:

$$\operatorname{sgn}\sigma\circ[i_0\ \ j_0]=-\operatorname{sgn}\sigma.$$

4.2 ĐỊNH THỨC

Khi giải hệ phương trình tuyến tính $\begin{cases}ax+by=c\\ a'x+b'y=c'\end{cases}$ ta tính các định thức

$$D=\begin{vmatrix}a & b\\ a' & b'\end{vmatrix}=ab'-ba',\ D_x=\begin{vmatrix}c & b\\ c' & b'\end{vmatrix}=cb'-bc',\ \ D_y=\begin{vmatrix}a & c\\ a' & c'\end{vmatrix}=ac'-ca'.$$

Như vậy định thức của ma trận $A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}$ vuông cấp 2 là

$$|A|=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

Mặt khác nhóm đối xứng S_2 có 2 phần tử là $\sigma_1=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{bmatrix}$ và $\sigma_2=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ có dấu $\operatorname{sgn}\sigma_1=1$, $\operatorname{sgn}\sigma_2=-1$. Vậy

$$|A|=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

$$= \operatorname{sgn}\sigma_1\, a_{1\sigma_1(1)}a_{2\sigma_1(2)} + \operatorname{sgn}\sigma_2\, a_{1\sigma_2(1)}a_{2\sigma_2(2)} = \sum_{\sigma\in S_2} \operatorname{sgn}\sigma\, a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\,.$$

Ta mở rộng định nghĩa này cho ma trận vuông cấp n bất kỳ như sau.

<u>Định nghĩa 4.2</u>: Định thức của ma trận vuông $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ được ký hiệu là

$\det A$ hay $|A|$ và định nghĩa bởi biểu thức:

$$\det A = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \cdot a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)} \tag{4.5}$$

Như vậy định thức của ma trận vuông $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ là tổng tất cả các tích gồm n phần tử trên n hàng mà ở trên n cột khác nhau của ma trận A và nhân với +1 hoặc -1.

<u>Ví dụ 4.3</u>: a) Nhóm đối xứng S_2 có 6 phần tử là (xem ví dụ 1.23 chương 1)

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix},\ \sigma_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix},\ \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix},$$

$$\sigma_4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix},\ \sigma_5 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix},\ \sigma_6 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

có dấu $\operatorname{sgn}\sigma_1 = \operatorname{sgn}\sigma_4 = \operatorname{sgn}\sigma_5 = 1$, $\operatorname{sgn}\sigma_2 = \operatorname{sgn}\sigma_3 = \operatorname{sgn}\sigma_6 = -1$. Vậy

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma\in S_3} \operatorname{sgn}\sigma\, a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}a_{3\sigma(3)}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}\,. \tag{4.6}$$

b) Tính định thức $D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ & & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ & \bigcirc & & \ddots & \vdots \\ & & & & a_{nn} \end{vmatrix}$

Xét phép thế $\sigma_0 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{bmatrix}$ có $\operatorname{sgn}\sigma_0 = (-1)^0 = 1$.

Với mọi $\sigma \in S_n$, nếu $\sigma \neq \sigma_0$ thì tồn tại k sao cho $\sigma(k) \neq k \implies$ tồn tại k' sao cho $\sigma(k') < k' \Rightarrow a_{k'\sigma(k')} = 0 \Rightarrow a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)} = 0$. Vậy

$$D_n = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \cdot a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)} = \operatorname{sgn}\sigma_0 \cdot a_{11} \dots a_{nn} = a_{11} \dots a_{nn}. \quad (4.7)$$

Tương tự $$D'_n = \begin{vmatrix} a_{11} & & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \bigcirc & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \dots a_{nn}. \quad (4.8)$$

c) Tính định thức $$D''_n = \begin{vmatrix} & & \bigcirc & & a_{1n} \\ & & & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ & & \iddots & \vdots & \vdots \\ & a_{n-1,2} & \dots & \dots & a_{n-1n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Xét phép thế $\sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ n & n-1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$ thoả mãn $\sigma_1(k) + k = n+1, \ \forall k = 1, \dots, n$.

Ta dễ dàng tính được

$$k_1 = n-1, \ k_2 = n-2, \dots, k_{n-1} = 1 \ \Rightarrow k = 1 + \dots + (n-1) = n(n-1)/2$$

$\Rightarrow \operatorname{sgn}\sigma_1 = (-1)^{n(n-1)/2}$. Mặt khác với mọi $\sigma \in S_n$, nếu $\sigma \neq \sigma_1$ thì tồn tại k sao cho $\sigma(k) + k < n+1 \Rightarrow a_{k\sigma(k)} = 0 \Rightarrow a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)} = 0$.

Vậy $$D''_n = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \cdot a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)} = \operatorname{sgn}\sigma_1 \cdot a_{n1} \dots a_{k,n-k} \dots a_{1n}$$

$$= (-1)^{n(n-1)/2} a_{n1} \dots a_{k,n-k} \dots a_{1n} \quad (4.9)$$

Tương tự

$$D'''_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} & \\ \vdots & \vdots & \iddots & & \\ \vdots & \iddots & & \bigcirc & \\ a_{n1} & & & & \end{vmatrix} = (-1)^{n(n-1)/2} a_{n1} \dots a_{k,n-k} \dots a_{1n}. \quad (4.10)$$

Định nghĩa 4.3: Định thức của ma trận $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ của hệ véc tơ $\{v_1, \dots, v_n\}$ ứng với cơ sở $\mathscr{B}$ trong không gian véc tơ V cũng được gọi là định thức của hệ véc tơ $\{v_1, \dots, v_n\}$ và ký hiệu $D_{\mathscr{B}}\{v_1, \dots, v_n\}$. Vậy

$$D_{\mathscr{B}}\{v_1, \dots, v_n\} = \det A. \quad (4.11)$$

4.3 CÁC TÍNH CHẤT CƠ BẢN CỦA ĐỊNH THỨC

Tính chất 4.2:

1) Nếu đổi chỗ hai hàng của ma trận thì định thức đổi dấu:

$$A = [a_{ij}]_{n\times n}, \ A' = [a'_{ij}]_{n\times n}, \ a'_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{nếu } i \neq k, m \\ a_{kj} & \text{nếu } i = m \\ a_{mj} & \text{nếu } i = k \end{cases} \quad \text{thì } \det A' = -\det A.$$

Thật vậy: $$\det A' = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \cdot a'_{1\sigma(1)} \dots a'_{k\sigma(k)} \dots a'_{m\sigma(m)} \dots a'_{n\sigma(n)}$$

$$= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \cdot a_{1\sigma(1)} \dots a_{m\sigma(k)} \dots a_{k\sigma(m)} \dots a_{n\sigma(n)}$$

$$= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \cdot a_{1\sigma'(1)} \dots a_{k\sigma'(k)} \dots a_{m\sigma'(m)} \dots a_{n\sigma'(n)}$$

$$= -\sum_{\sigma'\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma' \cdot a_{1\sigma'(1)} \dots a_{m\sigma'(k)} \dots a_{k\sigma'(m)} \dots a_{n\sigma'(n)} = -\det A$$

trong đó $\sigma' = \sigma \circ [k \quad m]$.

2) Định thức có tính chất tuyến tính đối với mỗi hàng:

Cho hai ma trận $A = [a_{ij}]_{n\times n}$, $B = [b_{ij}]_{n\times n}$ và ma trận $C = [c_{ij}]_{n\times n}$ có hàng thứ k là tổ hợp tuyến tính của hàng thứ k của A và B.

Nghĩa là $\begin{cases} c_{ij} = a_{ij} = b_{ij} & \text{nếu } i \neq k \\ c_{kj} = \alpha a_{kj} + \beta b_{kj}\,; & \text{với mọi } j = 1,\ldots,n. \end{cases}$

thì $\det C = \alpha \det A + \beta \det B$.

Thật vậy: $\det C = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \cdot c_{1\sigma(1)} \ldots c_{k\sigma(k)} \ldots c_{n\sigma(n)}$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \cdot a_{1\sigma(1)} \ldots (\alpha a_{k\sigma(k)} + \beta b_{k\sigma(k)}) \ldots a_{n\sigma(n)}$$

$$= \alpha \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \cdot a_{1\sigma(1)} \ldots a_{k\sigma(k)} \ldots a_{n\sigma(n)} + \beta \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \cdot b_{1\sigma(1)} \ldots b_{k\sigma(k)} \ldots b_{n\sigma(n)}$$

$= \alpha \det A + \beta \det B$.

3) Từ 1) và 2) suy ra rằng trong một ma trận có hai hàng tỷ lệ thì định thức bằng 0.

4) Nếu ta cộng vào một hàng một tổ hợp tuyến tính các hàng khác thì định thức không thay đổi.

5) Định thức của ma trận chuyển vị bằng định thức của ma trận đó:

Giả sử $A = [a_{ij}]_{n \times n}$, $A^t = [a'_{ij}]_{n \times n}$, $a'_{ij} = a_{ji}, i, j = 1,\ldots,n$

thì $\det A^t = \det A$.

$$\det A^t = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \cdot a'_{1\sigma(1)} \ldots a'_{k\sigma(k)} \ldots a'_{n\sigma(n)}$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \cdot a_{\sigma(1)1} \ldots a_{\sigma(k)k} \ldots a_{\sigma(n)n}$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \cdot a_{1\sigma^{-1}(1)} \ldots a_{k\sigma^{-1}(k)} \ldots a_{n\sigma^{-1}(n)}$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}\sigma^{-1} \cdot a_{1\sigma^{-1}(1)} \ldots a_{k\sigma^{-1}(k)} \ldots a_{n\sigma^{-1}(n)} = \det A$$

vì $\operatorname{sgn}\sigma = \operatorname{sgn}\sigma^{-1}$.

6) Từ 5) suy ra rằng các tính chất của định thức đúng với hàng thì cũng đúng với cột và ngược lại. Vì vậy ta chỉ cần chứng minh các định lý về định thức đúng với hàng. Chẳng hạn, từ 4) suy ra nếu ta cộng vào một cột một tổ hợp tuyến tính các cột khác thì định thức không thay đổi.

Định thức của mọi hệ véc tơ phụ thuộc tuyến tính đều bằng 0.

7) $$\overline{\det(A)}(\bmod p)=\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}\sigma\,\overline{a}_{1\sigma(1)}\ldots\overline{a}_{n\sigma(n)}=\begin{vmatrix}\overline{a}_{11} & \cdots & \overline{a}_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \overline{a}_{n1} & \cdots & \overline{a}_{nn}\end{vmatrix} \quad (4.12)$$

Ví dụ 4.4:

a) $$D_n=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & \ldots & 1\\ 1 & a & 1 & \ldots & 1\\ 1 & 1 & a & \ldots & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 1 & 1 & \ldots & a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a+n-1 & 1 & 1 & \ldots & 1\\ a+n-1 & a & 1 & \ldots & 1\\ a+n-1 & 1 & a & \ldots & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a+n-1 & 1 & 1 & \ldots & a\end{vmatrix} \text{ (cộng các cột vào cột 1)}$$

$$=(a+n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1\\ 1 & a & 1 & \ldots & 1\\ 1 & 1 & a & \ldots & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 1 & 1 & \ldots & a\end{vmatrix}=(a+n-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0\\ 1 & a-1 & 0 & \ldots & 0\\ 1 & 0 & a-1 & \ldots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 0 & 0 & \ldots & a-1\end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow D_n=(a+n-1)(a-1)^{n-1}.$$

b) $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ với $a_{ij}=\pm 1$

$$\overline{\det(A)}(\bmod 2)=\begin{vmatrix}\overline{1} & \ldots & \overline{1}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \overline{1} & \ldots & \overline{1}\end{vmatrix}=\overline{0}(\bmod 2)\ \Rightarrow\ \det A \text{ chẵn.}$$

4.4 CÁC CÁCH TÍNH ĐỊNH THỨC

4.4.1 Khai triển theo hàng, theo cột

Nếu ta nhóm theo cột thứ j công thức (4.5) thì ta được:

$$\det A = a_{1j}\left(\sum_{\sigma\in S_n,\sigma(1)=j} \operatorname{sgn}\sigma\cdot a_{2\sigma(2)}a_{3\sigma(3)}...a_{n\sigma(n)}\right)+$$

$$+a_{2j}\left(\sum_{\sigma\in S_n,\sigma(2)=j} \operatorname{sgn}\sigma\cdot a_{1\sigma(1)}a_{3\sigma(3)}...a_{n\sigma(n)}\right)+...+$$

$$+a_{nj}\left(\sum_{\sigma\in S_n,\sigma(n)=j} \operatorname{sgn}\sigma\cdot a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}...a_{n-1\sigma(n-1)}\right).$$

Vì vậy định thức của ma trận A được viết lại dưới dạng

$$\det A = a_{1j}A_{1j} + ... + a_{nj}A_{nj} \tag{4.13}$$

gọi là công thức khai triển của A theo cột thứ j.

A_{ij} được gọi là phần bù đại số của a_{ij}.

<u>Định lý 4.3</u>: $$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij} \tag{4.14}$$

Trong đó M_{ij} là định thức của ma trận cấp n-1 có được bằng cách xoá hàng i cột j của ma trận A.

Chứng minh: Trước hết ta chứng minh $A_{11} = M_{11}$. Ta có:

$$A_{11} = \sum_{\sigma\in S_n,\sigma(1)=1} \operatorname{sgn}\sigma\ a_{2\sigma(2)}...a_{n\sigma(n)} = \sum_{\sigma'\in S_{n-1}} \operatorname{sgn}\sigma'\ a_{2\sigma'(2)}...a_{n\sigma'(n)} = M_{11}$$

với $\sigma' = \sigma\big|_{\{2,...,n\}}$ là phép thế trong tập hợp $\{2,...,n\}$.

Trường hợp A_{ij} bất kỳ, ta thực hiện i-1 lần đổi chỗ các hàng và j-1 lần đổi chỗ các cột để đưa về hàng 1 cột 1.

Do đó $A_{ij} = (-1)^{(i-1)+(j-1)}M_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$.

Công thức khai triển theo hàng i được suy từ tính chất 3.7: 6)

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + \ldots + a_{in}A_{in} \tag{4.15}$$

<u>Ví dụ 4.5</u>: $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix} \overset{\substack{-c_1+c_3 \to c_3 \\ -2c_1+c_4 \to c_4}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -4 & -6 \\ 1 & 2 & -1 & -7 \end{vmatrix}$

$$= (-1)^{2+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & -4 & -6 \\ 2 & -1 & -7 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & -5 \\ 2 & -3 & -9 \end{vmatrix}$$

$$= (-2)(-3)(-1)\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = -6(9-5) = -24.$$

4.4.2 Định lý khai triển Laplace (theo k hàng k cột)

Từ ma trận $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ ta để ý k hàng: $i_1,\ldots,i_k$ và k cột: $j_1,\ldots,j_k$.

Giao của k hàng k cột này là một ma trận cấp k. Định thức của ma trận này được ký hiệu là $M_{i_1,\ldots,i_k}^{j_1,\ldots,j_k}$. Nếu từ ma trận A ta xoá đi k hàng $i_1,\ldots,i_k$ và k cột $j_1,\ldots,j_k$ thì ta có ma trận con cấp n-k. Định thức của ma trận này được ký hiệu là $\overline{M}_{i_1,\ldots,i_k}^{j_1,\ldots,j_k}$ và

$$A_{i_1,\ldots,i_k}^{j_1,\ldots,j_k} = (-1)^{i_1+\ldots+i_k+j_1+\ldots+j_k}\,\overline{M}_{i_1,\ldots,i_k}^{j_1,\ldots,j_k} \tag{4.16}$$

được gọi là phần bù đại số của $M_{i_1,\ldots,i_k}^{j_1,\ldots,j_k}$.

<u>Ví dụ 4.6</u>: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$

Có $M_{13}^{23} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, $A_{13}^{23} = (-1)^{1+3+2+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{24} \\ a_{41} & a_{44} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{24} \\ a_{41} & a_{44} \end{vmatrix}$.

Định lý 4.4 (Laplace):

1) Khai triển k hàng $i_1,...,i_k$:

$$\det A = \sum_{1\le j_1<...<j_k\le n} M_{i_1,...,i_k}^{j_1,...,j_k} A_{i_1,...,i_k}^{j_1,...,j_k} \tag{4.17}$$

Định thức của A bằng tổng tất cả các định thức con cấp k nằm trên k hàng $i_1,...,i_k$ nhân với phần bù đại số tương ứng của nó.

2) Khai triển k cột $j_1,..., j_k$:

$$\det A = \sum_{1\le i_1<...<i_k\le n} M_{i_1,...,i_k}^{j_1,...,j_k} A_{i_1,...,i_k}^{j_1,...,j_k} \tag{4.18}$$

Định thức của A bằng tổng tất cả các định thức con cấp k nằm trên k cột $j_1,..., j_k$ nhân với phần bù đại số tương ứng của nó.

Đặc biệt khi k =1 ta có công thức khai triển theo hàng và theo cột (3.4).

Chứng minh: Trường hợp $i_1 = 1,..., i_k = k$:

$$M_{1,...,k}^{1,...,k} = \sum_{\sigma\in S_k} \operatorname{sgn}\sigma \cdot a_{1\sigma(1)}...a_{k\sigma(k)}$$

$$\overline{M}_{1,...,k}^{1,...,k} = \sum_{\sigma'\in S_{n-k}} \operatorname{sgn}\sigma' \cdot a_{k+1\sigma'(k+1)}...a_{n\sigma'(n)} = A_{1,...,k}^{1,...,k}$$

Ứng với mỗi phép thế σ của tập $\{1,...,k\}$ và σ' của $\{k+1,...,n\}$ thì phép thế μ có hoán vị tương ứng $[\sigma(1),...,\sigma(k),\sigma(k+1),...,\sigma(n)]$ có số các nghịch thế bằng số các nghịch thế của σ cộng với số các nghịch thế của σ'. Do đó $\operatorname{sgn}\mu = \operatorname{sgn}\sigma \cdot \operatorname{sgn}\sigma'$. Vì vậy mỗi tích

$$\operatorname{sgn}\sigma \cdot a_{1\sigma(1)}...a_{k\sigma(k)} \cdot \operatorname{sgn}\sigma' \cdot a_{k+1\sigma'(k+1)}...a_{n\sigma'(n)}$$

là một hạng tử trong tổng của $\det A$. Nói cách khác $M_{1,...,k}^{1,...,k}\overline{M}_{1,...,k}^{1,...,k}$ chỉ bao gồm các hạng tử của $\det A$; nó là một bộ phận trong biểu thức tổng của $\det A$. Trường hợp tổng quát $M_{i_1,...,i_k}^{j_1,...,j_k}$, ta biến đổi hàng và cột của $\det A$ để đưa $M_{i_1,...,i_k}^{j_1,...,j_k}$ về định thức con bậc k góc trên bên trái. Ta thực hiện $i_1 - 1$ lần đổi chỗ hàng thứ i_1 để đưa về hàng thứ 1, ..., $i_k - 1$ lần đổi chỗ hàng thứ i_k để đưa về hàng thứ k. Tương tự đổi chỗ $j_1-1,\dots,j_k-1$ lần để đưa các cột $j_1,\dots,j_k$ về các cột 1,..., k. Vì vậy định thức đổi dấu

$$(-1)^{(i_1-1)+\dots+(i_k-1)+(j_1-1)+\dots+(j_k-1)}=(-1)^{i_1+\dots+i_k+j_1+\dots+j_k}.$$

Khi đổi vị trí như vậy định thức bù của $M_{i_1,\dots,i_k}^{j_1,\dots,j_k}$ vẫn là $\overline{M}_{i_1,\dots,i_k}^{j_1,\dots,j_k}$.

Do đó $A_{i_1,\dots,i_k}^{j_1,\dots,j_k}=(-1)^{i_1+\dots+i_k+j_1+\dots+j_k}\,\overline{M}_{i_1,\dots,i_k}^{j_1,\dots,j_k}$, như vậy các hạng tử của $M_{i_1,\dots,i_k}^{j_1,\dots,j_k}\cdot A_{i_1,\dots,i_k}^{j_1,\dots,j_k}$ cũng chỉ là các hạng tử của $\det A$.

Mặt khác mỗi $M_{i_1,\dots,i_k}^{j_1,\dots,j_k}\cdot A_{i_1,\dots,i_k}^{j_1,\dots,j_k}$ có $k!(n-k)!$ hạng tử. Số các định thức con $M_{i_1,\dots,i_k}^{j_1,\dots,j_k}$ trên k hàng $i_1,\dots,i_k$ bằng số các tổ hợp n chập k và bằng C_n^k. Các hạng tử của $M_{i_1,\dots,i_k}^{j_1,\dots,j_k}\cdot A_{i_1,\dots,i_k}^{j_1,\dots,j_k}$ và $M_{i_1,\dots,i_k}^{j'_1,\dots,j'_k}\cdot A_{i_1,\dots,i_k}^{j'_1,\dots,j'_k}$ khác nhau từng đôi một nếu $\{j_1,\dots,j_k\}\neq\{j'_1,\dots,j'_k\}$.

Do đó tổng $\sum\limits_{1\le j_1<\dots<j_k\le n} M_{i_1,\dots,i_k}^{j_1,\dots,j_k}A_{i_1,\dots,i_k}^{j_1,\dots,j_k}$ có $C_n^k k!(n-k)!=n!$ hạng tử phân biệt của $\det A$ nhưng $\det A$ cũng chỉ có $n!$ hạng tử. Vậy mỗi hạng tử của $\det A$ đều là hạng tử nào đó của một trong những $M_{i_1,\dots,i_k}^{j_1,\dots,j_k}\cdot A_{i_1,\dots,i_k}^{j_1,\dots,j_k}$ với $1\le j_1<\dots<j_k\le n$. Vậy ta có đẳng thức (3.6).

Công thức khai triển theo cột (3.7) được chứng minh trực tiếp hoàn toàn tương tự cách trên hoặc có thể suy ra từ kết quả trên và áp dụng tính chất $\det A=\det A^t$.

<u>Ví dụ 4.7</u>: $D_n=\left|\begin{array}{ccc:ccc} a_{11} & \dots & a_{1k} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} & 0 & \dots & 0 \\ \hdashline a_{k+11} & \dots & a_{k+1k} & a_{k+1k+1} & \dots & a_{k+1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} & a_{kk+1} & \dots & a_{nn} \end{array}\right|$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{k+1k+1} & \cdots & a_{k+1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{nk+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Vì $M_{1,\dots,k}^{j_1,\dots,j_k} = 0$ nếu $\{j_1,\dots,j_k\} \neq \{1,\dots,k\}$.

<u>Ví dụ 4.8</u>: Với mọi ma trận cùng cấp A, B luôn có $\det AB = \det A \det B$.

Thật vậy, giả sử $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$, $B = \left[b_{ij}\right]_{n\times n}$,

$$C = AB = \left[c_{ij}\right]_{n\times n} \quad , \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

Xét định thức cấp 2n:

$$D_{2n} = \left|\begin{array}{ccc|ccc} & & & 0 & & 0 \\ & a_{ij} & & & \bigcirc & \\ & & & 0 & & 0 \\ \hline -1 & & & & & \\ & \ddots\, -1 & \bigcirc & & b_{ij} & \\ \bigcirc & & \ddots\, -1 & & & \end{array}\right|$$

Khai triển Laplace theo n hàng đầu ta có $D_{2n} = \det A \det B$. Mặt khác, nhân b_{11} với cột 1, b_{21} với cột 2,..., b_{n1} với cột n của D_{2n} xong cộng tất cả vào cột n+1 thì định thức D_{2n} trở thành:

$$D_{2n} = \left|\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \cdots & a_{1n} & c_{11} & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & c_{n1} & 0 & 0 \\ \hline -1 & & \bigcirc & 0 & b_{12} & b_{1n} \\ & -1 & & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bigcirc & & -1 & 0 & b_{n2} & b_{nn} \end{array}\right|$$

Tiếp tục biến đổi tương tự như trên cuối cùng được:

$$D_{2n}=\left|\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \cdots & a_{1n} & c_{11} & \cdots & c_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & c_{n1} & \cdots & c_{nn}\\ \hline -1 & & \bigcirc & 0 & & 0\\ & -1 & & & \bigcirc & \\ \bigcirc & & -1 & 0 & & 0\end{array}\right|$$

Khai triển Laplace theo n hàng cuối ta được:

$$D_{2n}=(-1)^{1+2+\ldots+n+n+1+\ldots+2n}\left|\begin{array}{ccc} -1 & & \bigcirc\\ & -1 & \\ \bigcirc & & -1\end{array}\right|\left|\begin{array}{ccc} c_{11} & \cdots & c_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ c_{n1} & \cdots & c_{nn}\end{array}\right|$$

$$=(-1)^{\frac{2n(2n+1)}{2}+n}\cdot\det C=\det C.$$

4.5 ỨNG DỤNG ĐỊNH THỨC ĐỂ TÌM MA TRẬN NGHỊCH ĐẢO

4.5.1 Định nghĩa ma trận nghịch đảo

Ta đã biết vành $(\mathcal{M}_n,+,.)$ các ma trận vuông cấp n là không nguyên, vì vậy với ma trận vuông cho trước chưa chắc đã có ma trận nghịch đảo đối với phép nhân ma trận.

<u>Định nghĩa 4.4</u>: Ma trận vuông A được gọi là khả nghịch nếu tồn tại ma trận vuông cùng cấp B sao cho $AB=BA=I$.

Phép nhân ma trận có tính kết hợp nên ma trận B ở định nghĩa trên nếu tồn tại thì duy nhất, ta gọi ma trận này là ma trận nghịch đảo của A, ký hiệu A^{-1}.

4.5.2 Điều kiện cần và đủ để tồn tại ma trận nghịch đảo

<u>Định lý 4.5</u>: (điều kiện cần) Nếu A khả nghịch thì $\det A\neq 0$ (lúc đó ta nói ma trận A không suy biến).

Chứng minh: $AA^{-1}=I \Rightarrow \det A\det A^{-1}=\det AA^{-1}=\det I=1$.

Do đó $\det A = \dfrac{1}{\det A^{-1}} \neq 0$.

Định nghĩa 4.5: Ma trận $B = \left[A_{ij}\right]_{n\times n}$, trong đó A_{ij} là phần bù đại số của phần tử a_{ij} của ma trận $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$, được gọi là ma trận phụ hợp của A.

Định lý 4.6: (điều kiện đủ) Nếu $\det A \neq 0$ thì A khả nghịch và

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} B^t , \tag{4.19}$$

với B là ma trận phụ hợp của A.

Chứng minh: Khai triển định thức của ma trận A theo hàng thứ k ta được:

$$a_{k1}A_{k1} + \ldots + a_{kn}A_{kn} = \det A$$

Vậy $a_{i1}A_{k1} + \ldots + a_{in}A_{kn}$ là khai triển theo hàng thứ k của định thức của ma trận có được bằng cách thay hàng thứ k của A bởi hàng thứ i của A, do đó bằng 0.

Tóm lại $a_{i1}A_{k1} + \ldots + a_{in}A_{kn} = \begin{cases} \det A & \text{nếu } i = k \\ 0 & \text{nếu } i \neq k \end{cases} \Rightarrow AB^t = (\det A)I$.

Tương tự, khai triển theo cột ta có:

$$a_{1i}A_{1k} + \ldots + a_{ni}A_{nk} = \begin{cases} \det A & \text{nếu } i = k \\ 0 & \text{nếu } i \neq k \end{cases} \Rightarrow B^t A = (\det A)I . \tag{4.20}$$

Hệ quả 4.7: Nếu $BA = I$ hoặc $AB = I$ thì tồn tại A^{-1} và $A^{-1} = B$.

Chứng minh: $BA = I \Rightarrow \det A \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$ và

$$B = B(AA^{-1}) = (BA)A^{-1} = A^{-1}.$$

Ví dụ 4.9: Ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ có $\det A = -1$.

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = 40 , \qquad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = -13 ,$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2 & 5\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-5,\qquad A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2 & 3\\ 0 & 8\end{vmatrix}=-16,$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & 8\end{vmatrix}=5,\qquad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{vmatrix}=2,$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}2 & 3\\ 5 & 3\end{vmatrix}=-9,\qquad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 3\end{vmatrix}=3,$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{vmatrix}=1,$$

Vậy

$$A^{-1}=\frac{1}{-1}\begin{bmatrix}40 & -13 & -5\\ -16 & 5 & 2\\ -9 & 3 & 1\end{bmatrix}^t=-\begin{bmatrix}40 & -16 & -9\\ -13 & 5 & 3\\ -5 & 2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-40 & 16 & 9\\ 13 & -5 & -3\\ 5 & -2 & -1\end{bmatrix}.$$

4.5.3 Tìm ma trận nghịch đảo theo phương pháp Gauss-Jordan

Khi ta thực hiện liên tiếp các phép biến đổi sơ cấp lên các hàng của ma trận A để đưa A về ma trận đơn vị, theo tính chất 3.5 chương 3 thì điều này cũng có nghĩa là ta nhân bên trái của A các ma trận sao cho $E_1...E_k A = I$, trong đó $E_1,..., E_k$ là các ma trận dạng $R(k,\lambda)$, $P(i,j)$, $Q(i,j,\lambda)$ (xem 3.10, 3.11, 3.12). Mặt khác theo Hệ quả 4.7 thì $A^{-1}=E_1...E_k$.

Cũng với lập luận như trên ta có: $E_1...E_k = E_1...E_k I$ là ma trận có được bằng cách thực hiện bởi cùng các phép biến đổi sơ cấp tương ứng như đã thực hiện đối với ma trận A lên các hàng của ma trận đơn vị I. Vì vậy để tìm ma trận A^{-1} ta thực hiện các bước sau:

1) Viết ma trận đơn vị I bên phải ma trận A: $\quad A|I$

2) Thực hiện các phép biến đổi sơ cấp đồng thời lên các hàng của $A|I$ để đưa ma trận A ở vế trái về ma trận đơn vị.

3) Khi vế trái trở thành ma trận đơn vị thì vế phải là ma trận A^{-1}.

$$A|I \to ....\to I|A^{-1}. \tag{4.21}$$

Ví dụ 4.10: Tìm A^{-1} với $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&5&3\\1&0&8\end{bmatrix}$

$$\left.\begin{matrix}1&2&3\\2&5&3\\1&0&8\end{matrix}\right|\begin{matrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{matrix}\quad\xrightarrow{\substack{h_1\to h_1\\-2h_1+h_2\to h_2\\-h_1+h_3\to h_3}}\quad\left.\begin{matrix}1&2&3\\0&1&-3\\0&-2&5\end{matrix}\right|\begin{matrix}1&0&0\\-2&1&0\\-1&0&1\end{matrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{h_1\to h_1\\h_2\to h_2\\2h_2+h_3\to h_3}}\quad\left.\begin{matrix}1&2&3\\0&1&-3\\0&0&-1\end{matrix}\right|\begin{matrix}1&0&0\\-2&1&0\\-5&2&1\end{matrix}\quad\xrightarrow{\substack{h_1\to h_1\\-h_2\to h_2\\-h_3\to h_3}}\quad\left.\begin{matrix}1&2&3\\0&1&-3\\0&0&1\end{matrix}\right|\begin{matrix}1&0&0\\-2&1&0\\5&-2&-1\end{matrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{-3h_3+h_1\to h_1\\3h_3+h_2\to h_2\\h_3\to h_3}}\quad\left.\begin{matrix}1&2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{matrix}\right|\begin{matrix}-14&6&3\\13&-5&-3\\5&-2&-1\end{matrix}\quad\xrightarrow{\substack{-3h_2+h_1\to h_1\\h_2\to h_2\\h_3\to h_3}}\quad\left.\begin{matrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{matrix}\right|\begin{matrix}-40&16&9\\13&-5&-3\\5&-2&-1\end{matrix}$$

Vậy $A^{-1}=\begin{bmatrix}-40&16&9\\13&-5&-3\\5&-2&-1\end{bmatrix}$.

Chú ý 4.8: Tìm A^{-1} theo phương pháp Gauss-Jordan sẽ dễ dàng khi các phần tử của A^{-1} là các số nguyên (thường gặp khi $\det A=\pm 1$).

4.6 TÌM HẠNG CỦA MA TRẬN BẰNG ĐỊNH THỨC

Từ tính chất 4.2 ta biết rằng định thức của một hệ phụ thuộc tuyến tính bằng 0. Do đó nếu định thức $D_{\mathscr{B}}\{v_1,\dots,v_n\}\neq 0$ thì hệ $\{v_1,\dots,v_n\}$ độc lập tuyến tính.

Ngược lại, giả sử hệ $\{v_1,\dots,v_n\}$ độc lập tuyến tính, ta sẽ chứng minh $D_{\mathscr{B}}\{v_1,\dots,v_n\}\neq 0$. Thật vậy, giả sử $v_j=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}e_i$, $A=\left[a_{ij}\right]$,

$\det A=D_{\mathscr{B}}\{v_1,\dots,v_n\}$, vì hệ $\{v_1,\dots,v_n\}$ độc lập tuyến tính nên nó là một cơ sở của V.

Vậy ta có $e_j = \sum_{i=1}^{n} b_{ij} v_i$, $B = \left[b_{ij}\right]$ $\Rightarrow$ $AB = I \Rightarrow \det A \neq 0$. (4.22)

Định lý 4.9: Hệ $\{v_1, ..., v_n\}$ độc lập khi và chỉ khi $D_{\mathscr{B}}\{v_1, ..., v_n\} \neq 0$.

Định lý 4.10: Giả sử $A = \left[a_{ij}\right]$ là một ma trận cỡ $m \times n$. Nếu có định thức con cấp p khác 0 và mọi định thức con cấp $p+1$ bao quanh nó đều bằng 0 thì $r(A) = p$.

Chứng minh: Không mất tính tổng quát ta có thể giả thiết định thức con cấp p góc trái $M_{1,...,p}^{1,...,p} \neq 0$. Khi đó p véc tơ cột đầu độc lập tuyến tính, vì nếu có một véc tơ là tổ hợp tuyến tính của $p-1$ véc tơ còn lại thì mâu thuẫn với giả thiết $M_{1,...,p}^{1,...,p} \neq 0$, do đó $r(A) \geq p$. Ta cần chứng minh bất đẳng thức ngược lại.

Với mọi $k = 1, ..., m;$ $s = p+1, ..., n$; Xét ma trận cấp $p+1$:

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1p} & a_{1s} \\ a_{21} & \cdots & \cdots & a_{2p} & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & \cdots & a_{pp} & a_{ps} \\ a_{k1} & \cdots & \cdots & a_{kp} & a_{ks} \end{bmatrix}$$

Khi $k \leq p$: Ma trận B có hai hàng bằng nhau, do đó $\det B = 0$.

Khi $k > p$: $\det B = 0$, vì $\det B$ là định thức cấp $p+1$ bao $M_{1,...,p}^{1,...,p}$.

Mặt khác khai triển theo hàng cuối ta được dạng sau:

$$a_{k1}\mu_1 + ... + a_{kp}\mu_p + a_{ks} M_{1,...,p}^{1,...,p} = 0$$

$\Rightarrow$ $a_{ks} = \lambda_1 a_{k1} + ... + \lambda_p a_{kp}$, với mọi k = 1, 2, ..., m

Vì vậy véc tơ cột v_s là tổ hợp tuyến tính của p véc tơ cột đầu. Vậy $r(A) \leq p$.

Hệ quả 4.11: A là một ma trận cỡ $m \times n$ thì $r(A) = r(A^t) \leq \min(m, n)$.

Chú ý 4.12: 1) Từ công thức (4.20) ta đã chứng minh được nếu A là ma trận chuyển từ từ cơ sở $\mathscr{B}$ sang cơ sở $\mathscr{B}'$ thì A^{-1} là ma trận chuyển từ từ cơ sở $\mathscr{B}'$ sang cơ sở $\mathscr{B}$.

2) Để tìm hạng ma trận A ta tìm định thức con cấp 2 khác 0. Bao định thức này bởi các định thức con cấp 3. Nếu tất cả các định thức cấp 3 bao quanh đều bằng 0 thì $r(A)=2$. Nếu có định thức con cấp 3 khác 0 thì ta tiếp tục bao định thức cấp 3 này bởi các định thức cấp 4...

Ví dụ 4.11: a) Ma trận $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & 3 \\ -2 & 9 & -4 & 7 \\ -4 & 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

có $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 9 \end{vmatrix}=20$, $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -2 & 9 & -4 \\ -4 & 3 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 9 & 7 \\ -4 & 3 & -1 \end{vmatrix}=0$.

Vậy $r(A)=2$

b) Ma trận $B=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ -4 & -2 & 1 & -7 \\ 3 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & -4 & 3 & -4 \end{bmatrix}$ có $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{vmatrix}=0$ nhưng $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=1$.

Bao định thức này bởi định thức cấp 3 $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}=1$.

Định thức cấp 4 duy nhất $|B|=0$. Vậy $r(B)=3$.

Ví dụ 4.12: Tìm hạng của ma trận $A=\begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{bmatrix}$

Ta có $|A|=(a+3)(a-1)^3$.

Vậy: • Khi $a\neq -3, a\neq 1$ thì $r(A)=4$;

- Khi $a=1$ thì $r(A)=1$;

- Khi $a=-3$, $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow r(A)=3$.

Trong thực hành ta có thể kết hợp phương pháp này với phương pháp biến đổi sơ cấp lên các hàng các cột ma trận thì quá trình tìm hạng ma trận sẽ nhanh hơn.